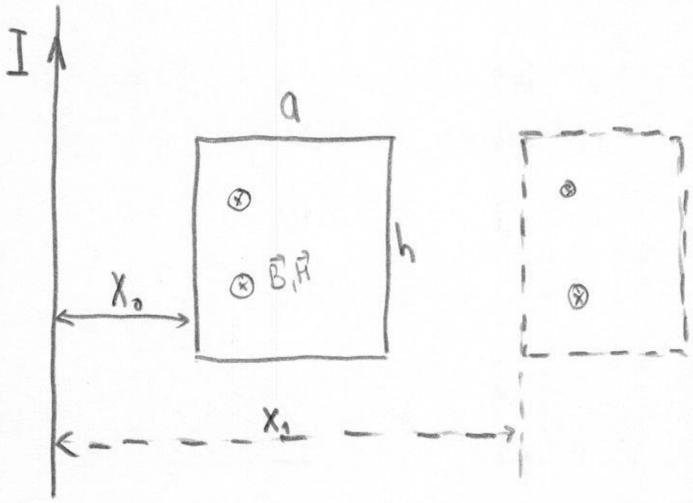
Израчунати индуковану количину наелектрисања q_r када се правоугаона контура страница a и h и отпорности R помери са растојања x_0 на растојање x_1 од бесконачно дугог проводника кроз који протиче струја јачине I.



Решење:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{- индукована Емс}$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad \text{- струја кроз контуру}$$

$$q_r = \int_{t_0}^{t_1} i\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathcal{E}}{R}\,dt = -\frac{1}{R}\int_{t_0}^{t_1} \frac{d\Phi}{dt}\,dt = -\frac{1}{R}\int_{\Phi_0}^{\Phi_1} d\Phi$$

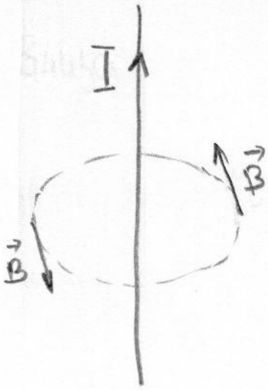
$$q_r = -\frac{1}{R}(\Phi_1 - \Phi_0) = -\frac{\Delta\Phi}{R}$$

$t = 0 \ , \ x = x_0$

$$\Phi_0 = \int \vec{B}\, d\vec{S}$$

$$\vec{B} \parallel d\vec{S}$$

$$\Phi_0 = \int B\, dS$$



$$\oint \vec{H}\, d\vec{l} = I$$

$$\vec{H} \parallel d\vec{l}$$

$$H \cdot 2r\pi = I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r\pi}$$

$$\Phi_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{x_0}^{x_0+a} \int_0^h \frac{1}{x}\, dx\, dy$$

$$\underline{\Phi_0 = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \ln \frac{x_0 + a}{x_0}}$$

$$\Phi_1 = \int \vec{B}\, d\vec{S}$$

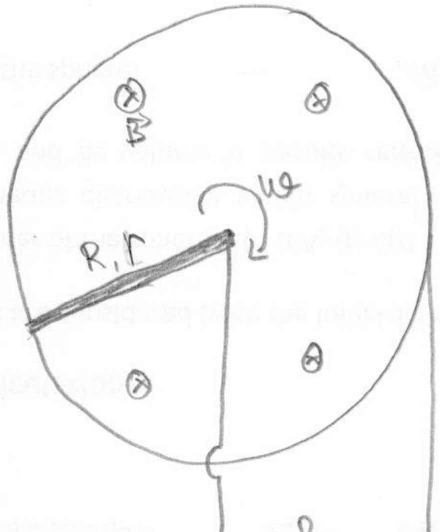
$\dots$

$$\underline{\Phi_1 = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \ln \frac{x_1 + a}{x_1}}$$

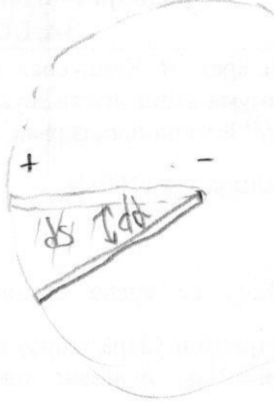
$$q = -\frac{1}{R}(\Phi_1 - \Phi_0) = \frac{1}{R}(\Phi_0 - \Phi_1) = \frac{1}{R} \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \left(\ln \frac{x_0 + a}{x_0} - \ln \frac{x_1 + 0}{x_1} \right)$$

$$\underline{q = \frac{1}{R} \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \ln \frac{x_1 (x_0 + a)}{x_0 (x_1 + a)}}$$

Проводна шипка отпорности R и дужине r се обрће угаоном брзином ω око једног фиксираног краја, док други крај клизи без трења по проводном кругу занемарљиве отпорности. Цео систем се налази у константном хомогеном магнетном пољу индукције $\vec{B}$ као на слици. Одредити снагу која се ослобађа на отпорности R_x.



$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt}$$



$$d\Phi = \vec{B}\, d\vec{S}$$

$$\vec{B} \parallel d\vec{S}$$

$$d\Phi = B\, dS$$

$$\mathcal{E} = B \frac{dS}{dt}$$

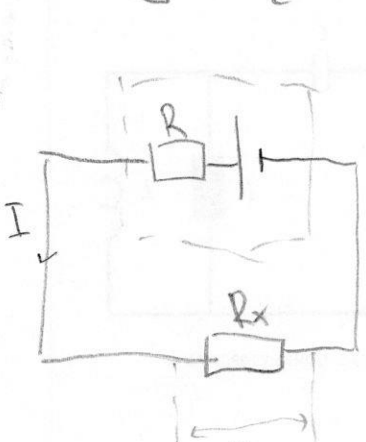
$$dS = r^2\pi \cdot \frac{d\varphi}{2\pi}$$

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$$

$$\mathcal{E} = B \frac{\frac{1}{2} r^2 d\varphi}{dt}$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} r^2 B \frac{d\varphi}{dt} \quad ; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} r^2 B \omega$$



$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R_x} \qquad P_x = U_x \cdot I$$

$$I = \frac{U_x}{R_x}$$

$$I = \frac{r^2 B \omega}{2(R + R_x)} \qquad P_x = \frac{U_x^2}{R_x}$$

$$U_x = I \cdot R_x \qquad P_x = \frac{1}{4} r^4 B^2 \omega^2 \frac{R_x^2}{(R+R_x)^2} \cdot \frac{1}{R_x}$$

$$U_x = \frac{1}{2} r^2 B \omega \frac{R_x}{R + R_x} \qquad P_x = \frac{1}{4} r^4 B^2 \omega^2 \frac{R_x}{(R+R_x)^2}$$

42. У електрично коло у облику квадрата странице дужине $a = 1{,}5\ m$ везана је ~~тињ~~ тињалица унутрашње отпорности $r = 10\ \Omega$ чији је напон паљења $U_p = 0{,}1\ V$.

Коло се налази у равни која је нормална на хомогено магнетно поље $\vec{B}$. Почев од тренутка $t=0$ интензитет магнетског поља почиње да се повећава по закону $B = B_0 + At$. Ако је отпорност проводника која чини коло $R = 0{,}1\ \Omega$ наћи минималну вредност константе A да би се тињалица упалила.

42.

$a = 1{,}5\ m \quad r = 10\,\Omega \quad U_p = 0{,}1\ V$

$B = B_0 + At \ , R = 0{,}1\,\Omega$

$A = ?$

$$\mathcal{E} = \left| -\frac{d\Phi}{dt} \right|$$

$$\Phi = \int_S \vec{B}\, d\vec{S}$$

$$S = a^2$$

$$\Phi = \int_S B\, dS$$

$$\Phi = \int_S B(t)\, dS$$

$$\Phi = B(t) \int_S dS$$

$$\Phi = B(t) \cdot S$$

$$\Phi = B(t) \cdot a^2$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = a^2 \frac{dB(t)}{dt}$$

$$B(t) = B_0 + At$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = a^2 \cdot A$$

$$\mathcal{E} = \left| -\frac{d\Phi}{dt} \right|$$

$$\mathcal{E} = a^2 A$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \qquad U_p = r \cdot i$$

$$U_p = \frac{\mathcal{E} \cdot r}{R + r}$$

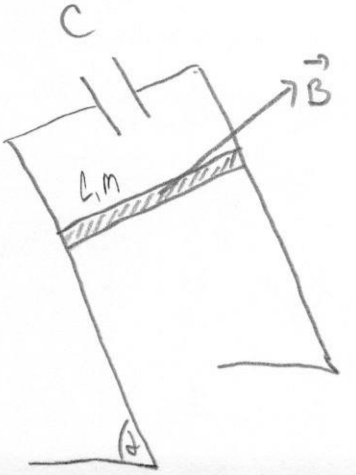
$$U_p \leq \frac{\mathcal{E} \cdot r}{R + r}$$

$$U_p \leq \frac{A a^2 r}{R + r}$$

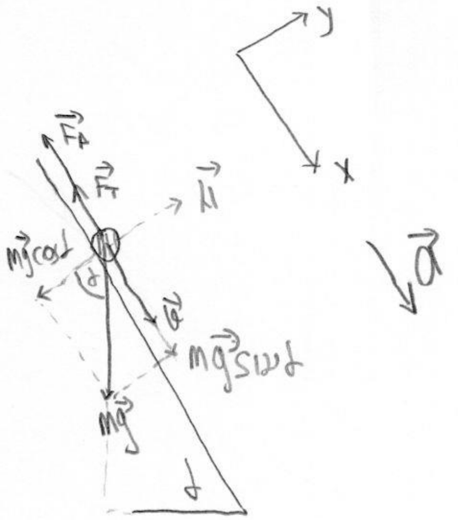
$$A \geq \frac{U_p (R + r)}{a^2 r}$$

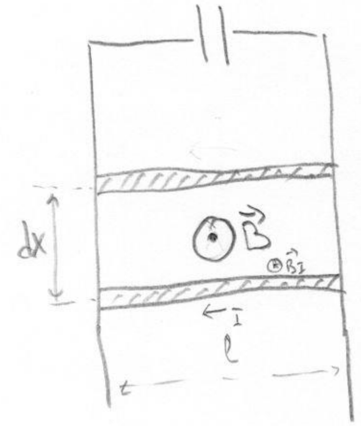
$$A \geq \frac{U_p}{a^2} \left(1 + \frac{R}{r} \right)$$

По шинама од бакра, које су нагнуте под углом α према хоризонтали, може клизити шипка масе m и занемарљивог отпора. Коефицијент трења између шина и шипке је μ. Систем се налази у хомогеном магнетном пољу индукције B. Отпор шина и доводних жица је занемарљив. Одредите убрзање шипке уколико је пуштена са врха шина које су спојене преко кондензатора капацитета C, а магнетно поље је нормално на шипку и шине.



Решение:





$$m\vec{a} = \sum \vec{F_i}$$

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F_t} + \vec{F_A}$$

$$\mathcal{E} = U_c$$

$$C = \frac{q}{U_c}$$

$$U_c = \frac{q}{C}$$

$$I = \frac{dq}{dt}$$

$$I = \frac{d}{dt}(U_c \cdot C)$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$d\Phi = \vec{B}\,d\vec{S} \qquad \vec{B} \parallel d\vec{S}$$

$$d\Phi = B\,dS$$

$$d\Phi = B\,l\,dx$$

$$\mathcal{E} = \frac{B\,l\,dx}{dt}$$

$$\boxed{\mathcal{E} = B\,l\,v}$$

$$I = C \frac{dU_c}{dt}$$

$$I = C \cdot \frac{d\mathcal{E}}{dt}$$

$$I = -C \cdot B\ell \frac{dv}{dt}$$

$$I = B\ell C \cdot a$$

Амперова сила

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = I \cdot \vec{\ell} \times \vec{B}$$

$$\vec{\ell} \perp \vec{B}$$

$$\vec{F} = -I\ell B \, \vec{e}_x$$

$$F = I\ell B$$

$$x: \quad ma = mg\sin\alpha - \mu N - I\ell B$$

$$y: \quad 0 = N - mg\cos\alpha$$

$$N = mg\cos\alpha$$

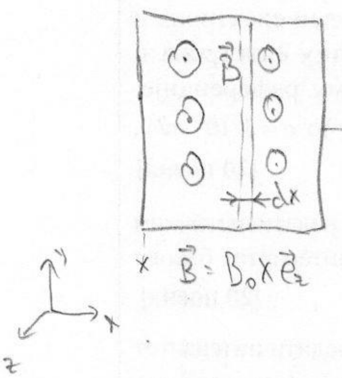
$$ma = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - B\cdot\ell\cdot C\cdot a\cdot\ell\cdot B$$

$$ma = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - B^2\ell^2 C \cdot a$$

$$a(m + B^2\ell^2 C) = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

$$a = \frac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{m + B^2\ell^2 C}$$

Струјна контура облика квадрата странице l лежи у xOy равни и креће се у правцу x-осе константном брзином $\vec{v} = v\vec{e}_x$. У равни у којој делује струјна контура делује магнетно поље облика $\vec{B} = B_0 x \vec{e}_z$, где је B_0 константа. Одредити $\mathcal{E}$ која се индукује у контури.



$\vec{B} = B_0 x \vec{e}_z$

$$\Phi = \int_S \vec{B}\, d\vec{S}$$

$$\vec{B} \parallel d\vec{S}$$

$$\Phi = \int_S B\, dS$$

$$\Phi = \int_x^{x+l} B_0 x\, l\, dx$$

$$\Phi = B_0 l \int_x^{x+l} x\, dx$$

$$\Phi = B_0 l \left. \frac{x^2}{2} \right|_x^{x+l}$$

$$\Phi = \frac{B_0 l}{2} \left((x+l)^2 - x^2 \right)$$

$$\mathcal{E} = \left| -\frac{d\Phi}{dt} \right|$$

$$\mathcal{E} = \frac{d}{dt} \left[\frac{B_0 l}{2} \left((x+l)^2 - x^2 \right) \right]$$

$$\mathcal{E} = \frac{B_0 l}{2} \frac{d}{dt} \left[(x+l)^2 - x^2 \right]$$

$$v = \frac{x}{t}$$

$$x = vt$$

$$\mathcal{E} = \frac{B_0 l}{2} \frac{d}{dt} \left[(vt+l)^2 - v^2 t^2 \right]$$

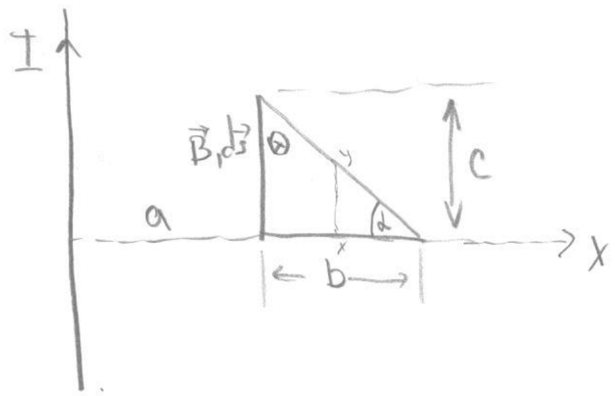
$$\mathcal{E} = \frac{B_0 l}{2} \left(2(vt+l) \cdot v - 2v^2 t \right)$$

$$\mathcal{E} = \frac{B_0 l}{2} \left(\cancel{2v^2 t} + 2lv - \cancel{2v^2 t} \right)$$

$$\mathcal{E} = \frac{B_0 l}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} l v$$

$$\mathcal{E} = B_0 l^2 v$$

Наћи израз за узајамну индукцију између бесконачно дугог проводника и проводне троугаоне контуре у ваздуху. Распоред проводника је дат на слици.



Решење:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

$$d\Phi = \vec{B}\, d\vec{S}$$

$$\vec{B} \parallel d\vec{S}$$

$$d\Phi = B\, dS$$

$$\Phi = \int_S B\, dS$$

$$\Phi = \int_a^{a+b}\int_0^{y} \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\, dx\, dy$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_a^{a+b} \frac{y}{x}\, dx$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{c}{b}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{a+b-x}$$

$$\frac{y}{a+b-x} = \frac{c}{b}$$

$$y = \frac{c}{b}(a+b-x)$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_a^{a+b} \frac{c}{b}\,\frac{a+b-x}{x}\, dx$$

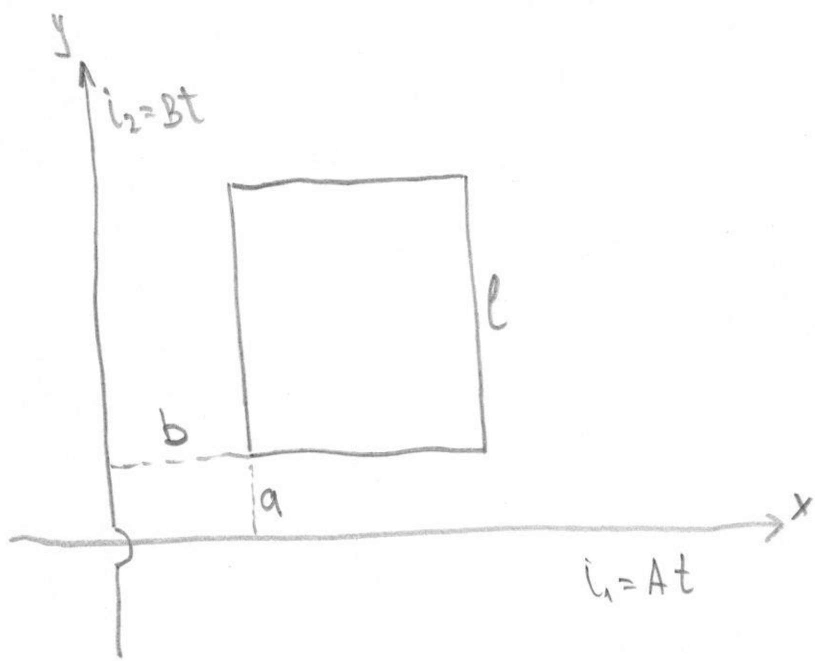
$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\,\frac{c}{b}\left[(a+b)\ln\frac{a+b}{a} - (\cancel{a}+b-\cancel{a})\right]$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\,\frac{c}{b}\left[(a+b)\ln\frac{a+b}{a} - b\right]$$

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{c}{b}\left[(a+b)\ln\frac{a+b}{a} - b\right]$$

Проводник кроз који тече струја $i_1(t) = At$ постављен је дуж x-осе, а проводник кроз који тече струја $i_2(t) = Bt$ дуж y-осе. У xOy равни постављена је квадратна контура дужине l и отпора R.

Одредите индуковану струју и њен смер унутар контуре, ако струја у проводницима тече у позитивном смеру оса.



Решење:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\,\frac{1}{y}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\,\frac{1}{x}$$

Флукс магнетног поља:

$$\Phi_1 = \int_S \vec{B}_1\, d\vec{S}$$

$$\vec{B}_1 \parallel d\vec{S}$$

$$\Phi_1 = \int_b^{b+l}\int_a^{a+l} \frac{\mu_0 i_1}{2\pi}\,\frac{1}{y}\, dx\, dy$$

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi}\int_b^{b+l} dx \int_a^{a+l} \frac{dy}{y}$$

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 i_1 l}{2\pi}\ln\frac{a+l}{a}$$

исто

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 i_2 l}{2\pi}\ln\frac{b+l}{b}$$

$$\vec{B}_1 = B_1 \vec{e}_z$$

$$\vec{B}_2 = -B_2 \vec{e}_z$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 i_1 l}{2\pi}\ln\frac{a+l}{a} - \frac{\mu_0 i_2 l}{2\pi}\ln\frac{b+l}{b}$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(i_1 \ln\frac{a+l}{a} - i_2 \ln\frac{b+l}{b}\right)$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R}\,\frac{d\Phi}{dt}$$

$$i = \frac{\mu_0 l}{2\pi R}\,\frac{d}{dt}\left(At \ln\frac{a+l}{a} - Bt \ln\frac{b+l}{b}\right)$$

$$i = \frac{\mu_0 l}{2\pi R}\left(A \ln\frac{a+l}{a} - B \ln\frac{b+l}{b}\right)$$